Ασκήσεις Φραγμένων Συνόλων

1) Έστω $A \neq \emptyset$ και αφ σύνολο με $A \subseteq \mathbb{R}$
ΝΔΟ το $k \in \mathbb{R}$ είναι αφ του $A \Leftrightarrow \sup A \leq k$

ΛΥΣΗ

$\{\Rightarrow\}$: Το k αφ του A και ΘΔΟ $\sup A \leq k$
Προφανώς αφού το k αφ και έχουμε $\sup A$ το Supremum θα ‛ναι το μικρότερο από όλα τα τυχαία α.φ, άρα θα ισχύει $\sup A \leq k$

$\{\Leftarrow\}$: Ισχύει $\sup A \leq k$ και ΘΔΟ το k αφ του A
Από τον ορισμό του άνω φράγματος λέμε πως για το $A \subseteq \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \leq k$
Όπου κατά αυτόν τον τρόπο $x \leq \sup A \leq k$.

SOS

2) Έστω $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $B \subseteq A$
ΝΔΟ $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$

ΛΥΣΗ

$B \subseteq A \Rightarrow \alpha \in B \Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \inf A \leq \alpha \leq \sup A$, $\forall \alpha \in B$

- $\inf A \leq \alpha \Rightarrow \inf A$ κφ του $B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$
- $\alpha \leq \sup A \Rightarrow \sup A$ αφ του $B \Rightarrow \sup B \leq \sup A$

Αλλά, $\inf A \leq \alpha \leq \sup A$, $\forall \alpha \in B$

Άρα,
$\inf A \leq \inf B \leq \alpha \leq \sup B \leq \sup A$

(2) SOS

3) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα

ΝΔΟ

i) $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

ii) $\inf(A\cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

ΛΥΣΗ

i) $A \subseteq A\cup B \Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha \in A\cup B \Rightarrow \inf(A\cup B) \leq \alpha \leq \sup(A\cup B), \alpha \in A$

• $\alpha \leq \sup(A\cup B) \Rightarrow \sup(A\cup B)$ αφ του $A \Rightarrow \sup A \leq \sup(A\cup B)$ ①

$B \subseteq A\cup B \Rightarrow \alpha \in B \Rightarrow \alpha \in A\cup B \Rightarrow \inf(A\cup B) \leq \beta \leq \sup(A\cup B), \alpha \in B$

• $\beta \leq \sup(A\cup B) \Rightarrow \sup(A\cup B)$ αφ του $B \Rightarrow \sup B \leq \sup(A\cup B)$ ②

Άρα, από ① + ② είναι:

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A\cup B) \quad ③$$

Έπειτα

$$\gamma \in A\cup B \Rightarrow \begin{cases} \gamma \in A \\ \text{ή} \\ \gamma \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma \leq \sup A \\ \gamma \leq \sup B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \leq \max(\sup A, \sup B), \forall \gamma \in A\cup B$$

Άρα, το $\max(\sup A, \sup B)$ αφ του $A\cup B$

Άρα $\sup(A\cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ ④

Από ③, ④ έχουμε

$$\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

ii) Απο το i)

- $\inf(A\cup B)\leq \alpha \Rightarrow \inf(A\cup B)$ κφ του A $\Rightarrow$
$\Rightarrow \inf(A\cup B) \leq \inf A$ ①
- $\inf(A\cup B)\leq \beta \Rightarrow \inf(A\cup B)$ κφ του B $\Rightarrow$
$\Rightarrow \inf(A\cup B) \leq \inf B$ ②

Άρα, απο ① + ② εχουμε:

$$\max(\inf A, \inf B) \geq \inf(A\cup B) \quad ③$$

Έπειτα,

$$\gamma\in A\cup B = \begin{cases} \gamma\in A \\ \acute{\eta} \\ \gamma\in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \inf A \leq \gamma \\ \\ \inf B \leq \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max(\inf A, \inf B) \leq \gamma \ , \ \forall \gamma\in A\cup B$$

Άρα, το $\max(\inf A, \inf B)$ κφ του $A\cup B$

Άρα, $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A\cup B)$ ④

Από, ③, ④ εχουμε

$$\inf(A\cup B) = \max(\inf A, \inf B)$$

4) Έστω $A,B\neq\emptyset$ και $A,B\subseteq\mathbb{R}$ με την ιδιοτητα $(\forall x\in A)(\forall y\in B): x\leq y$

i) ΝΔΟ $\exists \sup A, \sup B$ και ii) $\sup A \leq \inf B$

ΛΥΣΗ (Απο Ασκ. 10:) ↓

i) $x\leq y, \forall y\in B \Rightarrow x$ κφ του B $\Rightarrow \inf B$ Υπαρχει

Άρα, $x\leq \inf B, \forall x\in A \Rightarrow \inf B$ αφ του A $\Rightarrow \sup A$ Υπαρχει

ii) Άρα, $\sup A \leq \inf B$

(4)

5) Έστω $A, B \neq \emptyset$ φραγμένα
Αν $\sup A = \inf B$ τότε
ΝΔΟ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in A, \beta \in B) : \beta - \alpha < \varepsilon$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Γνωρίζουμε εξ ορισμού ότι

① • $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in A)$: $\sup A - \varepsilon < \alpha \Rightarrow -\alpha < \cancel{-\sup A} + \frac{\varepsilon}{2}$

② • $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta \in B)$: $\beta < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \beta < \cancel{\inf B} + \frac{\varepsilon}{2}$

Προσθέτουμε τις ①, ②

$$\beta - \alpha < \varepsilon$$

6) Αν $A, B \neq \emptyset$, φραγμένα με $A - B = \{\alpha - \beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$
ΝΔΟ
$\exists \sup(A-B), \inf(A-B)$ καθώς και ότι
i) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$
ii) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί νδο το $A-B$ φραγμένο

A φραγμένο $\Rightarrow |x_1| \leq k_1, \forall x_1 \in A$
B φραγμένο $\Rightarrow |x_2| \leq k_2, \forall x_2 \in B$
Έστω $w \in A-B \Rightarrow w = x_1 - x_2$, $x_1 \in A$ και $x_2 \in B$
Τότε $|w| = |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq k_1 + k_2 = k \Rightarrow A-B \neq \emptyset$

ii) Θέλω νδο ισχύει $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$
1) $x_1 \leq \sup A$, $\forall x_1 \in A$
2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_1 \in A)$: $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_1$
3) $\inf B \leq x_2$, $\forall x_2 \in B$
4) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta_1 \in B)$: $\beta_1 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$

SKAG

1) $x_1 \leq \sup A \Rightarrow x_1 \leq \sup A$
3) $\inf B \leq x_2 \Rightarrow -x_2 \leq -\inf B$
$\boxed{x_1 - x_2 \leq \sup A - \inf B}$

2) $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_1$
4) $-\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < -\beta_1$
$\boxed{\sup A - \inf B - \varepsilon < \alpha_1 - \beta_1}$

① $x_1 - x_2 \leq \sup A - \inf B \Rightarrow \sup(A-B) \leq \sup A - \sup B$
② $\sup A - \inf B < \alpha_1 - \beta + \varepsilon \Rightarrow \sup(A-B) \geq \sup A - \inf B$

Άρα, $\sup(A-B) = \sup A - \sup B$
Το i) Παρομοίως

SOS
7) Έστω $A \neq \emptyset$ φραγμένο σύνολο θετικών αριθμών με θετικό κ.φ. Ορίζουμε επίσης
$$B = \left\{ \frac{1}{x}, x \in A \right\}$$
ΝΔΟ
i) Το B φραγμένο
ii) $\sup B = \frac{1}{\inf A}$, $\inf B = \frac{1}{\sup A}$

ΛΥΣΗ

i) $A \neq \emptyset$ και φραγμένο $\xRightarrow{Αξ. 10}$ Άρα, $\exists$ Supremum, Infimum
• $M = \sup A \Leftrightarrow x \leq M \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{M}$ $\forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{M} \leq y$, $\forall y \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{M}$ κ.φ του B
• $m = \inf A \Leftrightarrow m \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$ $\forall x \in A \Rightarrow y \leq \frac{1}{m}$, $\forall y \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{m}$ αφ του B
Άρα, το B φραγμένο
ii) Για να είναι $\inf B = \frac{1}{M}$ πρέπει $\frac{1}{M} \geq$ τυχαίο κφ
Έστω k τυχαίο κφ του $B \Rightarrow k \leq y$, $\forall y \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq \frac{1}{x}$, $x \in A \Rightarrow x \leq \frac{1}{k}$, $\forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{k}$ αφ του A

SKAG

(6)

όμως, $\sup A = M \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{M} \geq k \Rightarrow \inf B = \frac{1}{M} \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf B = \frac{1}{\sup A}$

Επίσης, Για να είναι $\sup A = \frac{1}{m}$ θα πρέπει να είναι $\leq$ τυχαίο α.φ

Έστω τυχαίο λ α.φ του $B \Rightarrow y \leq \lambda \ \forall y \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \lambda,\ x \in A \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq x,\ x \in A \Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ κ.φ του A

$\inf A = m \geq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \sup B = \frac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup B = \frac{1}{\inf A}$

(8) Δίνεται $A \neq \emptyset$ μη αρνητικών αριθμών, φραγμένο και επίσης το σύνολο $B = \{\sqrt{x},\ x \in A\}$

ΝΔΟ

$\sup B = \sqrt{\sup A}$ και $\inf B = \sqrt{\inf A}$

ΛΥΣΗ

Αφού $A \neq \emptyset$ φραγμένο $\overset{\text{Αξ.10}}{\Longrightarrow}$ θα $\exists \inf A, \sup A$

- $M = \sup A \Rightarrow x \leq M,\ x \in A \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{M},\ x \in A \Rightarrow$
  $\Rightarrow y \leq \sqrt{M},\ y \in B \Rightarrow$ το $\sqrt{M}$ α.φ του B
- $m = \inf A \Rightarrow m \leq x,\ x \in A \Rightarrow \sqrt{m} \leq \sqrt{x},\ x \in A \Rightarrow$
  $\Rightarrow \sqrt{m} \leq y,\ y \in B \Rightarrow$ το $\sqrt{m}$ κ.φ του B

Για να είναι το $\sqrt{M} = \sup B$ πρέπει $\leq$ από οποιοδήποτε τυχαίο α.φ B

Έστω τυχαίο α.φ του B το $k \Rightarrow y \leq k,\ y \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x} \leq k,\ x \in A \Rightarrow x \leq k^2 \Rightarrow k^2$ α.φ του A

Άρα, αφού $\sup A = M \leq k^2 \Rightarrow \sqrt{M} \leq k \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup B = \sqrt{M} \Rightarrow \sup B = \sqrt{\sup A}$

SKAG

Για να είναι το $\inf B = \sqrt{m}$ πρέπει $\geq$ από οποιοδήποτε τυχαίο κφ μ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu \leq y, \ y \in B \Rightarrow \mu \leq \sqrt{x}, \ x \in A \Rightarrow \mu^2 \leq x, \ x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^2$ κφ του A

Αρα, Αφού $\inf A = m \geq \mu^2 \Rightarrow \sqrt{m} \geq \mu$

Άρα, $\inf B = \sqrt{m} \Rightarrow \inf B = \sqrt{\inf A}$

9) Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμενο συνολο με $x - y < 1$ $\forall x, y \in A$ ΝΔΟ $\sup A - \inf A \leq 1$

ΛΥΣΗ

$x - y < 1 \Rightarrow x < 1 + y$, $\forall x \in A$ και $y = ct$

$\Rightarrow$ Το $1+y$ είναι αφ του A

Αν $M = \sup A$ τότε θα ισχυει

$\sup A \leq 1 + y \Rightarrow \sup A - 1 \leq y$, $\forall y \in A$

Αρα, το $\sup A - 1$ κ.φ του A

Αν $m = \inf A$ τοτε θα ισχυει

$\sup A - 1 \leq \inf A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup A - \inf A \leq 1$

Cos.

10) Να βρείτε το $\sup A$, για $A = \left\{ 1 - \frac{1}{\nu}, \ \nu \in \mathbb{N} \right\}$

ΛΥΣΗ

$1 - \frac{1}{\nu} < 1$, άρα το 1 α.φ του A

Είναι το 1 το $\sup A$; (ψιλαχναμε το Θεωρημα)

$\forall \varepsilon > 0$ Θεωρούμε $\nu > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\nu} > 1 - \varepsilon \Rightarrow$

$x > 1 - \varepsilon$, $\forall x \in A$ αρα το

$\sup A = 1$